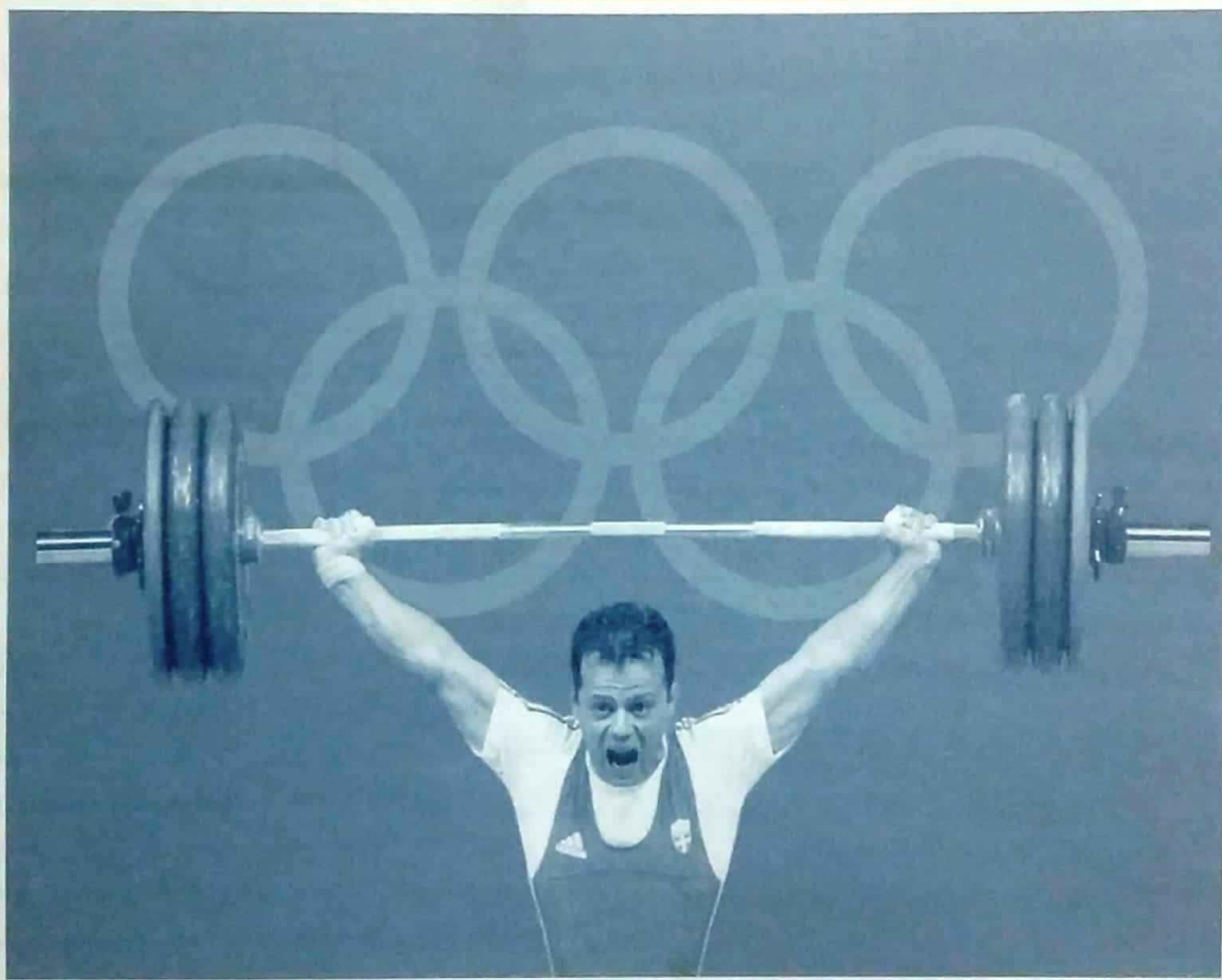




خمش خالص

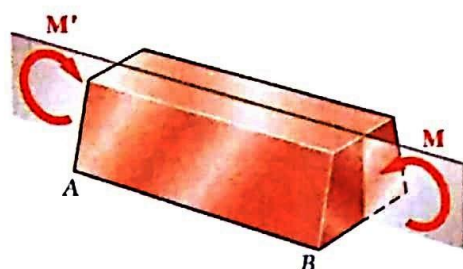


وزنه بردارها هنگام بلند کردن وزنه، دستهای خود را در فواصل مساوی از وزنه‌ها قرار می‌دهند. این کار موجب ایجاد خمش خالص در بخش مرکزی میله می‌شود. در این فصل خواهید آموخت که چگونه تنشهای عمودی و انحناء ناشی از خمش خالص را تعیین کنید.

۱-۴ مقدمه

در فصلهای گذشته آموختید که چگونه تنشها در عضوهای منشوری که تحت بارهای محوری یا گشتاورهای پیچشی قرار دارند را تعیین کنید. در این فصل و دو فصل آینده به تحلیل تنشها و کرنشها در عضوهای منشوری که تحت خمش* قرار دارند خواهیم پرداخت. خمش یکی از مفاهیم اصلی در طراحی بسیاری از ماشینها و اجزاء ساختمانی مانند تیرهاست.

در این فصل، عضوهای منشوری که گشتاورهای خمشی* مساوی و مخالف M و M' در صفحه طولی به آنها وارد می شود را مورد تحلیل قرار می دهیم. چنین عضوهایی را اصطلاحاً تحت خمش خالص* گویند. بیشتر عضوهایی که در این فصل بررسی می شوند دارای یک صفحه تقارن هستند که گشتاورهای M و M' در این صفحه به آنها وارد می شوند (شکل ۱-۴).

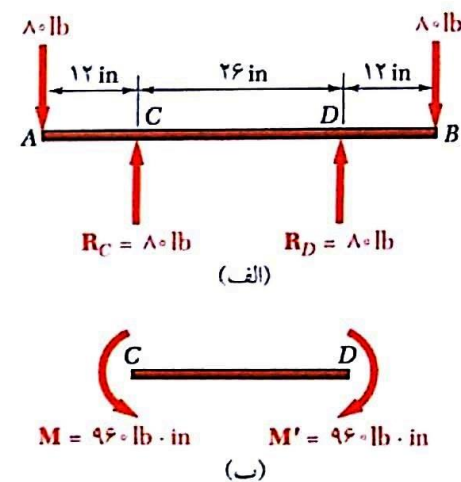


شکل ۱-۴

خمش میله وزنه‌ای که توسط وزنه‌بردار در بالای سر قرار می‌گیرد نمونه بارزی از خمش خالص است. این میله، دو وزنه مساوی که در فواصل برابر از دستان وزنه‌بردار قرار دارند را تحمل می‌کند. به علت تقارن نمودار آزاد میله، نیروهای عکس‌العمل دست باید برابر و در جهت مخالف وزنه‌ها باشند (شکل ۲-۴ الف). به این ترتیب، با در نظر گرفتن بخش میانی میله، یعنی CD ، وزنه‌ها و عکس‌العمل آنها را می‌توان با دو گشتاور خمشی مساوی و مخالف $960 \text{ lb} \cdot \text{in}$ جایگزین کرد و نشان داد که بخش میانی میله تحت خمش خالص است (شکل ۲-۴ ب). تحلیلی مشابه برای میل محور یک تریلر کوچک نیز نشان می‌دهد که بخش میانی میل محور که بین دو نقطه اتصال آن با تریلر قرار دارد، تحت خمش خالص است (شکل ۳-۴).

اگر چه کاربردهای فراوان و متنوعی را می‌توان برای خمش خالص بر شمرد، اما برای نشان دادن اهمیت پدیده خمش خالص، در این فصل، نتایج حاصل از تحلیل انواع دیگر بارگذاری مانند بارگذاری‌های محوری خارج از مرکز و بارگذاری عرضی را نیز بیان خواهیم کرد.

در شکل ۴-۴ یک گیره فولادی را می‌بینید که فکهای آن نیروی 150 lb به دو تکه چوب که قصد چسباندن آنها به یکدیگر را داریم وارد می‌کند. شکل ۵-۴ الف نیروهای برابر و مخالفی که از طرف چوبها به فکهای گیره وارد می‌شوند را نشان می‌دهد. این نیروها موجب یک بارگذاری خارج از مرکز*



شکل ۲-۴

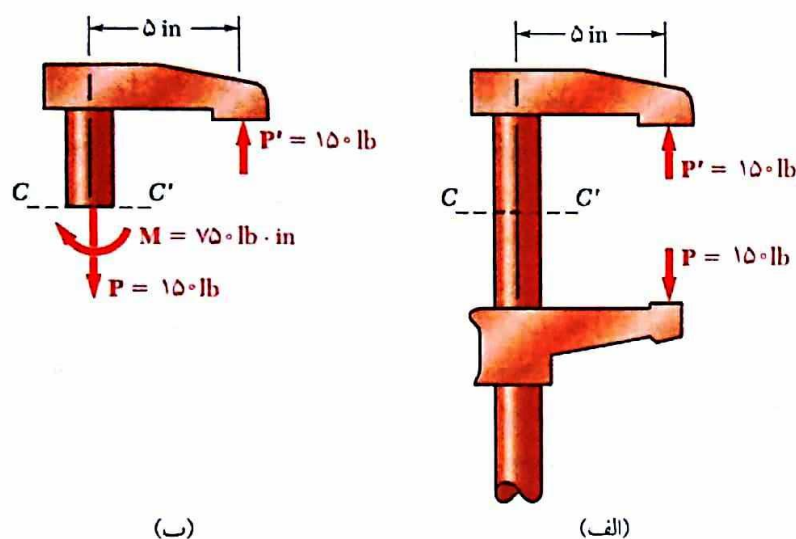
*eccentric loading



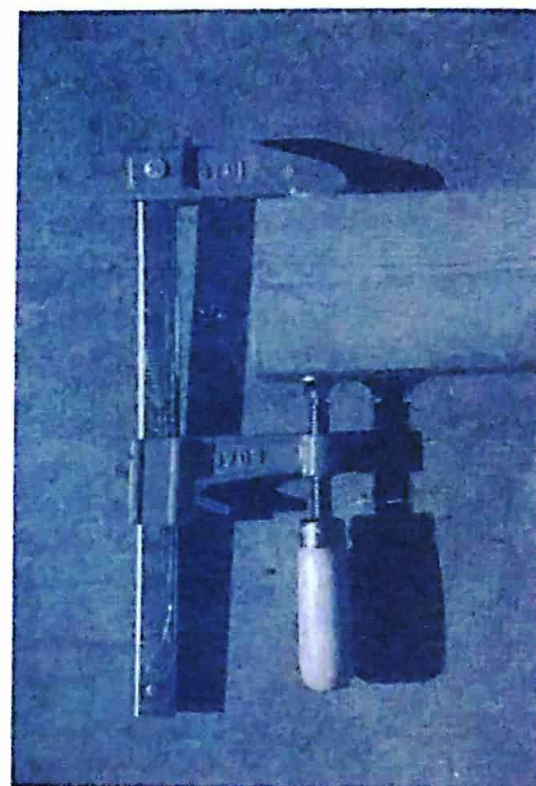
شکل ۳-۴

بخش مرکزی میل محور این تریلر کوچک تحت خمش خالص قرار دارد.

بر روی بدنه گیره می‌شوند. در شکل ۴-۵ ب، بدنه گیره را در مقطع CC' برش داده و نمودار آزاد نیمه بالایی آن را رسم نموده‌ایم. که از آنجا، نیروی محوری داخلی $P = 150 \text{ lb}$ و گشتاور خمشی $M = 750 \text{ lb} \cdot \text{in}$ بدست می‌آیند. به این ترتیب، می‌توانیم اطلاعات خود پیرامون تنشهای ناشی از بارگذاری مرکزی و نتایج حاصل از تحلیل آتی پیرامون تنشهای ناشی از خمش خالص را به منظور دستیابی به توزیع تنشها در اثر بارگذاری خارج از مرکز با یکدیگر ترکیب کنیم. در بخش ۴-۱۲ به این موضوع خواهیم پرداخت.



شکل ۴-۵

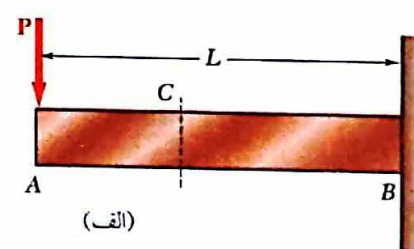


شکل ۴-۱۴

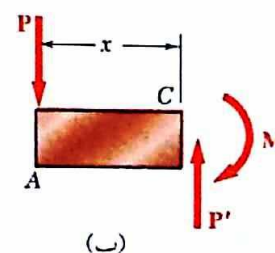
علاوه بر این، مطالعه خمش خالص، یک نقش اساسی در بررسی تیرها، یعنی عضوهای منشوری که تحت انواع مختلف بارهای عرضی قرار دارند، ایفاء می‌کند. برای مثال، تیر یکسر درگیر AB که بار متمرکز P به سر آزاد آن وارد می‌شود را در نظر بگیرید (شکل ۴-۶ الف). اگر این تیر را در نقطه C به فاصله x از نقطه A برش دهیم، با توجه به نمودار آزاد قسمت AC (شکل ۴-۶ ب) می‌بینیم که نیروهای داخلی وارد به این مقطع شامل نیروی P' برابر و مخالف P و گشتاور خمشی M با اندازه $M = Px$ است. توزیع تنشهای عمودی در این مقطع را می‌توان با توجه به گشتاور خمشی M با این شرط که تیر تحت خمش خالص است بدست آورد. از طرف دیگر، تنشهای برشی در این مقطع بستگی به نیروی P' دارد، و شما در فصل ۶ خواهید آموخت که چگونه توزیع اینگونه نیروها را در یک مقطع تعیین کنید.

در نخستین قسمت این فصل به تحلیل تنشها و تغییرشکلهای ناشی از خمش خالص در یک عضو همگن با یک صفحه تقارن و ماده‌ای که از قانون «هوک» پیروی می‌کند خواهیم پرداخت. در یک بحث مقدماتی پیرامون تنشهای ناشی از خمش (بخش ۴-۲)، از روشهای استاتیک برای استخراج سه معادله اساسی که بایستی توسط تنشهای عمودی در هر مقطع دلخواه از یک عضو برقرار شوند استفاده می‌کنیم. در بخش ۴-۳، نشان می‌دهیم که مقاطع عرضی در عضوی که تحت خمش خالص قرار دارد، مسطح باقی می‌مانند. در بخش ۴-۴، روابط مربوط به تعیین تنشهای عمودی و همچنین شعاع انحناء عضو در ناحیه الاستیک را بدست خواهیم آورد.

در بخش ۴-۶، تنشها و تغییرشکلها در عضوهای مرکب* که بیش از یک ماده در ساخت آنها بکار رفته است را بررسی خواهیم کرد. به عنوان نمونه‌ای از این نوع تیرها می‌توان به تیرهای بتونی مسلح اشاره کرد که از بتون و میل‌گردهای فولادی ساخته شده‌اند و کاربردهای گسترده‌ای در ساخت بناها و پلها دارند. خواهید آموخت که چگونه سطح مقطع معادل* یک عضو مرکب را با شبیه‌سازی آن به یک عضو همگن به منظور محاسبه تغییرشکلهای ناشی از بارگذاری ترسیم کنید. به کمک این سطح مقطع



(الف)



(ب)

شکل ۴-۶

* composite members

* transformed section

معادل می‌توانید تنشها و تغییرشکلها در عضو مرکب اولیه را بدست آورید. بخش ۴-۷ به تعیین تمرکز تنش در مکانهایی که تغییر ناگهانی سطح مقطع داریم اختصاص دارد.

در قسمت بعدی این فصل، به مطالعه تغییر شکل پلاستیک در حالت خمش، یعنی تغییر شکل خمشی عضوهایی که تابع قانون «هوک» نیستند خواهیم پرداخت. پس از بررسی کلی تغییر شکل چنین عضوهایی (بخش ۴-۸)، به مطالعه تنشها و تغییرشکلها در عضوهایی که از مواد الاستوپلاستیک* ساخته شده‌اند می‌پردازیم (بخش ۴-۹). با محاسبه بیشترین گشتاور خمشی الاستیک* M_y که متناظر با آغاز تسلیم است، به بررسی اثرات گشتاورهای بزرگتر تا رسیدن به گشتاور خمشی پلاستیک* M_p که عضو در آن به طور کامل تسلیم می‌شود خواهیم پرداخت. همچنین خواهید آموخت که چگونه تغییرشکلهای ماندگار* و تنشهای پسماند** ناشی از این نوع بارگذاری را تعیین کنید (بخش ۴-۱۱). بایستی خاطر نشان کنیم که در طول نیم قرن گذشته خاصیت الاستوپلاستیک فولاد به طور گسترده در طراحی‌ها برای بالا بردن ضریب اطمینان و کاهش هزینه‌ها مورد استفاده قرار گرفته است.

در بخش ۴-۱۲ تحلیل بارگذاری محوری خارج از مرکز* بر روی صفحه تقارن یک عضو، مانند آنچه در شکل ۴-۴ می‌بینید را به روش «بر هم نهی» اثر تنشهای ناشی از خمش خالص و بارگذاری محوری مرکزی خواهیم آموخت.

مبحث خمش عضوهای منشوری با ارائه تحلیل خمش غیر متقارن* (بخش ۴-۱۳)، و بررسی حالت کلی بارگذاری محوری خارج از مرکز (بخش ۴-۱۴) پایان می‌پذیرد. بخش پایانی این فصل، یعنی بخش ۴-۱۵، به تعیین تنشها در عضوهای خمیده* اختصاص دارد.

*elastoplastic materials

*maximum elastic moment

*plastic moment

**residual stresses

*permanent deformations

*eccentric axial loading

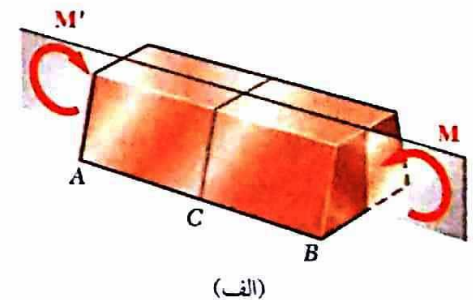
*unsymmetric bending

*curved members

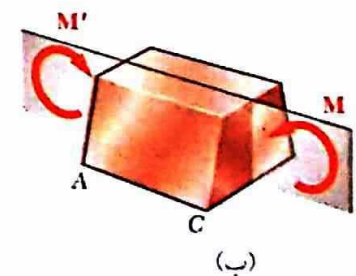
۲-۴ عضوهای متقارن در خمش خالص

عضو منشوری AB را در نظر بگیرید که دارای یک صفحه تقارن است و گشتاورهای خمشی مساوی و مخالف M و M' در این صفحه به آن وارد می‌شوند (شکل ۴-۷ الف). می‌دانیم که اگر عضو AB را در نقطه دلخواه C در جهت عرضی برش دهیم، شرط تعادل بخش AC مستلزم این است که نیروهای داخلی در این مقطع برابر با گشتاور خمشی M باشد (شکل ۴-۷ ب). بنابراین، نیروهای داخلی در هر مقطع از یک عضو متقارن در خمش خالص، معادل با یک گشتاور خمشی است. با استفاده از قراردادهای متداول، علامت گشتاور خمشی M وارد به عضو شکل ۴-۷ الف را مثبت می‌گیریم، یعنی هنگامی که سطح بالایی تیر به صورت مقعر در می‌آید. طبیعتاً، خلاف این جهت را منفی می‌گیریم.

چنانچه تنش عمودی در یک نقطه معین از مقطع عرضی را با σ_x و مؤلفه‌های تنش برشی را با τ_{xy} و τ_{yx} نشان دهیم، می‌توان گفت که مجموع مؤلفه‌های نیروهای داخلی در این مقطع، معادل با گشتاور خمشی M است (شکل ۴-۸).

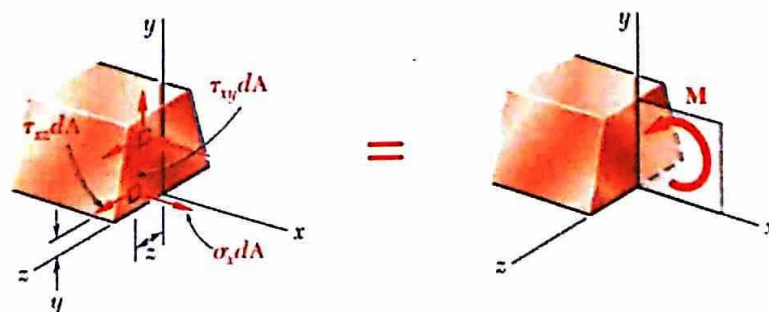


(الف)



(ب)

شکل ۴-۷



شکل ۴-۸

از درس استاتیک به خاطر دارید که گشتاور خمشی M متشکل از دو نیروی مساوی و مخالف است، به گونه‌ای که مجموع مؤلفه‌های این نیروها در هر جهت برابر صفر است. علاوه بر این، گشتاور یک جفت نیرو (کوپل) نسبت به هر محور عمود بر صفحه آن یکسان، و نسبت به هر محوری که از

این صفحه بگذرد برابر صفر است. چنانچه محور z را آنگونه که در شکل ۴-۸ می بینید انتخاب کنیم، می توان معادل بودن مؤلفه های نیروهای داخلی با گشتاور M را به صورت زیر نشان داد:

$$\int \sigma_x dA = 0 \quad \text{مؤلفه های } x: \quad (۱-۴)$$

$$\int z \sigma_x dA = 0 \quad \text{گشتاور حول محور } y: \quad (۲-۴)$$

$$\int (-y \sigma_x dA) = M \quad \text{گشتاور حول محور } z: \quad (۳-۴)$$

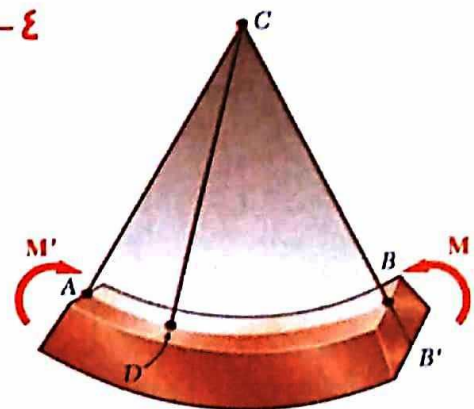
سه معادله اضافی دیگر را می توان از برابر صفر قرار دادن مجموع مؤلفه های y ، مؤلفه های z ، و گشتاورها نسبت به محور x بدست آورد، اما این معادلات تنها حاوی مؤلفه های تنش برشی هستند و همانگونه که در بخش بعد خواهید دید، مؤلفه های تنشهای برشی هر دو برابر صفرند.

در اینجا باید به دو نکته اشاره کنیم: (۱) علامت منفی در معادله (۳-۴) به خاطر این است که تنش کششی ($\sigma_x > 0$) منجر به گشتاور منفی (ساعتگرد) نیروی عمودی $\sigma_x dA$ نسبت به محور z می شود. (۲) معادله (۲-۴) را به راحتی می توان انتظار داشت، چرا که وارد کردن گشتاور خمشی در صفحه تقارن عضو AB منجر به یک توزیع تنش عمودی می شود که نسبت به محور y متقارن است. بار دیگر خاطرنشان می کنیم که توزیع واقعی تنشها در یک مقطع مشخص را نمی توان تنها به کمک روابط استاتیکی تعیین کرد، چرا که این یک مسئله نامعین استاتیکی است. توزیع تنشها را می توان با تحلیل تغییر شکل ایجاد شده در عضو بدست آورد.

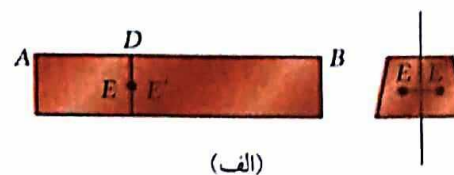
۳-۴ تغییر شکل یک عضو متقارن در خمش خالص

اینک، به تحلیل تغییر شکل یک عضو منشوری با یک صفحه تقارن که ابتدا و انتهای آن تحت کوپل خمشی M و M' قرار دارد می پردازیم. عضو تحت اثر این کوپل خم می شود، اما تقارن خود را نسبت به صفحه کما کما حفظ می کند (شکل ۴-۹). علاوه بر این، از آنجا که گشتاور خمشی M در هر مقطع یکسان است، عضو به طور یکنواخت خم می شود. بنابراین، خط AB که مکان برخورد صفحه تقارن با سطح بالایی عضو است دارای یک انحناء ثابت خواهد بود. به عبارت دیگر، خط AB که در ابتدا یک خط راست بود به کمانی از یک دایره با مرکز C تبدیل می شود، خط $A'B'$ که محل برخورد سطح پایینی عضو با صفحه تقارن است (در شکل نشان داده نشده) نیز چنین حالتی خواهد داشت. هنگامی که عضو به صورتی که در شکل می بینید خم شود (یعنی هنگامی که $M > 0$ است) طول خط AB کاهش می یابد، حال آنکه در این حالت طول خط $A'B'$ افزایش پیدا می کند.

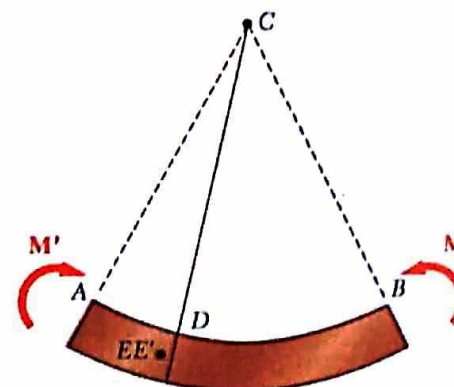
در مرحله بعد، اثبات می کنیم که هر مقطع عمود بر محور این عضو، مسطح باقی خواهد ماند و امتداد تمام این صفحات از نقطه C خواهد گذشت. اگر آنچه فرض کردیم درست نباشد، نقطه ای مانند E واقع بر مقطع اولیه D را می توان یافت (شکل ۴-۱۰ الف) که پس از خمش عضو، بر روی صفحه عمود بر صفحه تقارن که خط CD را دربر می گیرد قرار نخواهد گرفت (شکل ۴-۱۰ ب). اما به علت تقارن عضو، نقطه دیگری مانند E' وجود خواهد داشت که دقیقاً به همین روش تغییر شکل خواهد داد. فرض می کنیم که پس از خمش تیر، همانگونه که در شکل ۴-۱۰ ب می بینید، هر دو نقطه در سمت چپ صفحه CD قرار داشته باشند. از آنجا که مقدار گشتاور خمشی M در تمام طول عضو ثابت است، وضعیت مشابهی در هر مقطع دیگر حاکم خواهد بود و نقاط متناظر با E و E' به سمت چپ حرکت خواهند کرد. بنابراین، از دیدگاه بیننده ای که در نقطه A قرار دارد بارگذاری موجب می شود که نقاط E و E' که در مقاطع مختلف قرار دارند به سمت جلو (به طرف بیننده) حرکت کنند. اما از دیدگاه بیننده ای که در نقطه B قرار دارد قضیه کاملاً برعکس است. این تناقض منجر به این نتیجه می شود که نقاط E و E' بر روی صفحه CD قرار دارند، به این معنی که صفحات پس از خمش مسطح باقی می مانند و از نقطه C می گذرند. با این وجود، خاطرنشان می کنیم که این بحث امکان تغییر شکل صفحه یک سطح مقطع را منتفی نمی داند (به بخش ۴-۵ نگاه کنید).



شکل ۴-۹



(الف)

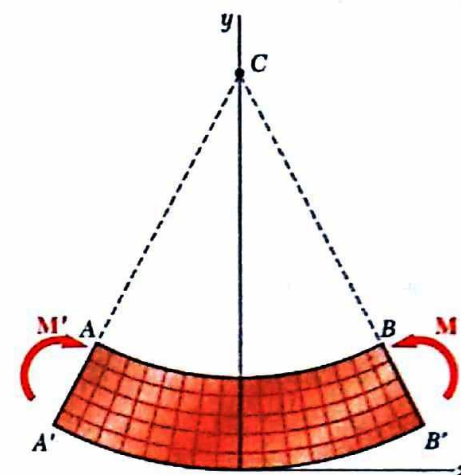


(ب)

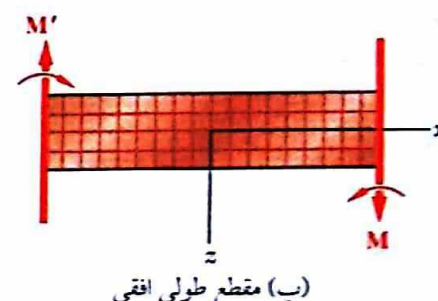
شکل ۴-۱۰

فرض می‌کنیم که این عضو به تعداد زیادی مکعبهای کوچک تقسیم شده است به گونه‌ای که وجوه مکعبها موازی با صفحات سه گانه مختصاتند. پس از وارد کردن کوپلهای M و M' به این عضو، طبق خاصیتی که اثبات کردیم، اجزاء این عضو باید به گونه‌ای که در شکل ۱۱-۴ می‌بینید، تغییر شکل دهند. از آنجا که تمام وجوهی که در دو نمای شکل ۱۱-۴ می‌بینید نسبت به هم دارای زاویه 90° هستند می‌توان نتیجه گرفت که $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = 0$ و از آنجا $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$ توجه کنید که سه مؤلفه تنش σ_y ، σ_z و τ_{yz} بر روی سطوح این عضو باید برابر صفر باشند. از آنجا که تغییرشکلهای بوجود آمده مستلزم هیچگونه تأثیر متقابلی بین اجزاء در یک مقطع عرضی نیست می‌توان فرض کرد که این سه مؤلفه تنش در سراسر عضو برابر صفرند. مشاهدات تجربی و اصول تئوری الاستیسیته برای قطعات نازک و بلند که تحت تغییرشکلهای کوچک قرار می‌گیرند درستی این فرض را تأیید می‌کنند^۱. بنابراین، تنها مؤلفه تنش غیر صفری که به هر یک از مکعبها وارد می‌شود مؤلفه σ_x خواهد بود. به این ترتیب، در هر نقطه از یک عضو باریک و بلند که تحت خمش خالص قرار داشته باشد حالت تنش تک‌محوری خواهیم داشت. یادآوری می‌کنیم که برای $M > 0$ ، طول خطوط AB و $A'B'$ به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد، که از آنجا کرنش ϵ_x و تنش σ_x در بخش بالایی عضو، منفی (فشاری) و در بخش پایینی آن، مثبت (کششی) خواهد بود.

از بحث بالا چنین برمی‌آید که باید صفحه‌ای موازی با سطوح بالایی و پایینی عضو وجود داشته باشد که در آن، ϵ_x و σ_x برابر صفر باشند. این صفحه را سطح خنثی^{*} گویند. سطح خنثی، صفحه تقارن را در امتداد کمانی از دایره DE قطع می‌کند (شکل ۱۲-۴ الف). محل برخورد سطح خنثی با یک مقطع عرضی نیز یک خط راست است که محور خنثی^{*} نامیده می‌شود (شکل ۱۲-۴ ب). برخلاف گذشته که مبدأ مختصات را بر روی سطح پایینی عضو قرار می‌دادیم، از این به بعد مبدأ مختصات را بر روی سطح خنثی قرار می‌دهیم و فاصله عرضی هر نقطه تا محور خنثی را با y نمایش می‌دهیم.



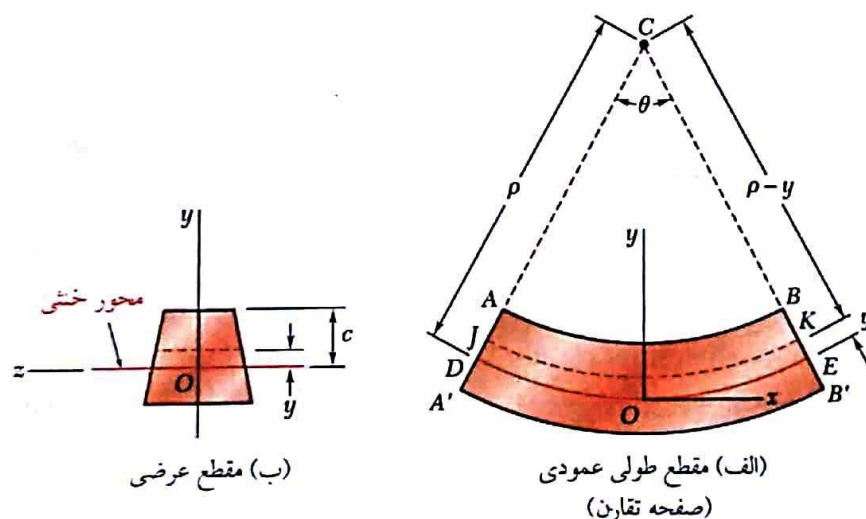
(الف) مقطع طولی عمودی
(صفحه تقارن)



(ب) مقطع طولی افقی

شکل ۱۱-۴

* neutral surface
* neutral axis



شکل ۱۲-۴

چنانچه شعاع کمان DE را با ρ (شکل ۱۲-۴ الف)، و زاویه مرکزی مقابل به کمان DE را با θ نشان دهیم، با توجه به اینکه طول کمان DE برابر با طول عضو L پیش از تغییر شکل است، داریم:

$$L = \rho \theta \quad (۴-۴)$$

طول کمان JK که در فاصله y از بالای سطح خنثی قرار دارد، برابر است با:

$$L' = (\rho - y)\theta \quad (۵-۴)$$

۱ - به مسئله ۳۲-۴ نگاه کنید.

از آنجا که طول اولیه کمان JK برابر L بود، تغییر طول JK چنین خواهد بود:

$$\delta = L' - L \quad (۴-۶)$$

یا جایگذاری معادلات (۴-۴) و (۵-۴) در (۶-۴) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\delta = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta \quad (۷-۴)$$

کرنش طولی x در اجزاء JK از تقسیم δ به طول اولیه آن یعنی L بدست می‌آید:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta} \quad \text{یا}$$

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (۸-۴)$$

علامت منفی به این خاطر است که فرض کردیم گشتاور خمشی مثبت است و سطح بالایی تیر، شکل مقعر به خود می‌گیرد.

به علت مسطح ماندن مقاطع موازی، تغییر شکل یکسانی در تمام صفحات موازی با صفحه تقارن رخ خواهد داد. بنابراین، مقدار کرنش که از معادله (۸-۴) بدست می‌آید در تمام نقاط معتبر است و می‌توان نتیجه گرفت که کرنش عمودی طولی x با فاصله y از سطح خشی به طور خطی تغییر می‌کند. بیشترین مقدار مطلق کرنش x هنگامی حاصل می‌شود که y بیشترین مقدار باشد، اگر بیشترین فاصله از سطح خشی را با c نشان دهیم (که منطبق بر سطح بالایی یا پایینی عضو است)، در این صورت بیشترین مقدار مطلق کرنش m از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \quad (۹-۴)$$

با حل رابطه (۹-۴) برای ρ و جایگذاری مقدار آن در معادله (۸-۴) می‌توان چنین نوشت:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c}\epsilon_m \quad (۱۰-۴)$$

تحلیل تغییر شکل یک عضو در خمش خالص را با بیان این مطلب به پایان می‌بریم که هنوز قادر به محاسبه کرنش یا تنش در یک نقطه معین از عضو نیستیم، چرا که هنوز محل سطح خشی در عضو را نمی‌دانیم^۲.

* longitudinal normal strain

* maximum absolute value of the strain

۴-۴ تنشها و تغییر شکلهای در ناحیه الاستیک

اینک، حالتی را در نظر می‌گیریم که گشتاور خمشی M به اندازه‌ای است که تنشهای عمودی ایجاد شده در عضو کمتر از استحکام تسلیم σ_y باشند. این بدین معنی است که برای تمام کاربردهای عملی، تنشها در عضو زیر حد تناسب و حد الاستیک هستند، تغییر شکل ماندگار وجود ندارد و قانون هوک، برای تنش تک‌محوری بکار می‌رود. چنانچه ماده را همگن فرض کنیم و مدول الاستیسیته آن را با E نمایش دهیم، در جهت طولی x رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$\sigma_x = E\epsilon_x \quad (۱۱-۴)$$

یا ضرب طرفین معادله (۱۰-۴) در E چنین خواهیم داشت:

$$E\epsilon_x = -\frac{y}{c}(E\epsilon_m)$$

۲- اگر عضو دارای دو صفحه تقارن عمودی و افقی باشد (برای مثال، مانند عضوی با سطح مقطع چهارگوش)، و منحنی تنش-کرنش آن در حالت کشش و فشار یکسان باشد، سطح خشی منطبق با صفحه تقارن عضو خواهد بود.

یا با استفاده از معادله (۱۱-۴)،

$$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m \quad (12-4)$$

که σ_m بیانگر بیشترین مقدار مطلق تنش است. این رابطه نشان می‌دهد که در ناحیه الاستیک، تنش عمودی به طور خطی با فاصله از سطح خنثی تغییر می‌کند (شکل ۱۳-۴).
بایستی خاطرنشان کنیم که کماکان محل سطح خنثی و بیشترین مقدار تنش σ_m را نمی‌دانیم، اما با استفاده از معادلات (۱-۴) و (۳-۴) که از روابط استاتیک بدست آمدند می‌توان آنها را پیدا کرد. با جایگذاری مقدار σ_x از معادله (۱۲-۴) در (۱-۴) می‌توان چنین نوشت:

$$\int \sigma_x dA = \int \left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right) dA = -\frac{\sigma_m}{c} \int y dA = 0$$

که از آنجا چنین نتیجه می‌شود:

$$\int y dA = 0 \quad (13-4)$$

این معادله نشان می‌دهد که گشتاور اول این سطح مقطع نسبت به محور خنثی آن باید صفر باشد.^۳ به عبارت دیگر، برای عضوی که تحت خمش خالص قرار دارد، مادامی که تنشها در ناحیه الاستیک باقی بمانند، محور خنثی از مرکز سطح مقطع می‌گذرد.
معادله (۳-۴) را به خاطر آورید که در بخش ۲-۴ نسبت به یک محور افقی دلخواه z بدست آمد:

$$\int (-y\sigma_x dA) = M \quad (3-4)$$

با توجه به اینکه محور z باید منطبق با محور خنثی سطح مقطع باشد، مقدار σ_x را از معادله (۱۲-۴) در معادله (۳-۴) قرار می‌دهیم:

$$\int (-y) \left(-\frac{y}{c}\sigma_m\right) dA = M$$

یا

$$\frac{\sigma_m}{c} \int y^2 dA = M \quad (14-4)$$

با توجه به اینکه در حالت خمش خالص، محور خنثی از مرکز سطح مقطع می‌گذرد، خاطرنشان می‌کنیم که I گشتاور اینرسی یا گشتاور دوم سطح مقطع نسبت به محوری است که از مرکز سطح می‌گذرد و عمود بر صفحه کوپل M است. با حل معادله (۱۴-۴) برای σ_m چنین خواهیم داشت^۴:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \quad (15-4)$$

با جایگذاری مقدار σ_m از معادله (۱۵-۴) در رابطه (۱۲-۴)، مقدار تنش عمودی σ_x در هر فاصله y از محور خنثی را بدست می‌آوریم:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad (16-4)$$

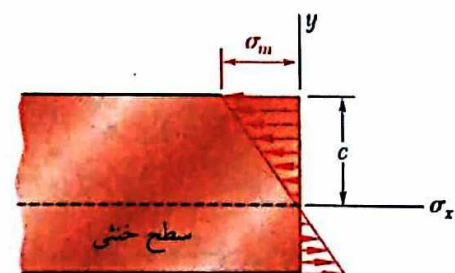
معادلات (۱۵-۴) و (۱۶-۴) به روابط خمش الاستیک* موسومند و تنش عمودی σ_x ناشی از خمش عضو را معمولاً تنش خمشی* گویند. هنگامی که گشتاور خمشی M مثبت باشد، تنشها در

*elastic flexure formulas

*flexural stress

۳- برای بحث پیرامون گشتاور سطوح به پیوست «الف» نگاه کنید.

۴- گشتاور خمشی را مثبت فرض کردیم. اگر گشتاور خمشی منفی باشد، M در معادله (۱۵-۴) را باید با مقدار مطلق آن $|M|$ جایگزین کنیم.



شکل ۱۳-۴

بالای محور خنثی (یعنی $y > 0$) فشاری ($\sigma_x < 0$)، و در صورت منفی بودن M ، تنشهای کششی ($\sigma_x > 0$) خواهند بود.

با توجه به معادله (۴-۱۵) می‌بینیم که نسبت I/c تنها بستگی به شکل هندسی سطح مقطع دارد. این نسبت را مدول مقطع الاستیک* می‌نامند و آن را با S نمایش می‌دهند. به این ترتیب،

$$S = \frac{I}{c} = \text{مدول مقطع الاستیک} \quad (۴-۱۷)$$

با قرار دادن S به جای I/c در معادله (۴-۱۵)، آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sigma_m = \frac{M}{S} \quad (۴-۱۸)$$

از آنجا که بیشترین تنش σ_m نسبت معکوس با مدول مقطع الاستیک S دارد، روشن است که در طراحی باید دقت کرد که تیرها تا حد امکان بیشترین S را داشته باشند. به عنوان مثال، برای یک تیر چوبی با مقطع چهارگوش به پهنای b و ارتفاع h چنین داریم:

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}Ah \quad (۴-۱۹)$$

که A مساحت مقطع تیر است. این رابطه نشان می‌دهد که بین دو تیر با مساحت مقطع یکسان (شکل ۴-۱۴) تیری دارای مدول مقطع بیشتری است که h بزرگتری داشته باشد، که این به معنی مقاومت بیشتر در مقابل خمش است.^۵

برای سازه‌های فولادی، تیرهای استاندارد آمریکایی (تیرهای S) و تیرهای بال‌پهن (تیرهای W)، (شکل ۴-۱۵)، به این علت که بخش بزرگی از سطح مقطع آنها در دورترین فاصله از محور خنثی قرار دارد (شکل ۴-۱۶) ارجحیت بیشتری نسبت به مقاطع دیگر دارند. بنابراین، برای یک مساحت معین و یک ارتفاع مشخص، طراحی بهتر است که بیشترین I و در نتیجه بیشترین S را بدست دهد. مقادیر مدول مقطع الاستیک برای تیرهای فولادی متداول در جدولی که برای شکلها و اندازه‌های مختلف این نوع تیرها وجود دارد آمده است. برای تعیین بیشترین تنش σ_m در مقطع معینی از یک تیر استاندارد، کافی است مهندس طراح مقدار مدول مقطع الاستیک S را از جدول خوانده، سپس گشتاور خمشی M در این مقطع را بر S تقسیم کند.

تغییر شکل عضو در اثر گشتاور خمشی M را توسط میزان خمیدگی سطح خنثی اندازه‌گیری می‌کنند. خمیدگی تیر به صورت عکس شعاع انحنا ρ تعریف می‌شود و از حل معادله (۴-۹) برای $1/\rho$ بدست می‌آید:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_m}{c} \quad (۴-۲۰)$$

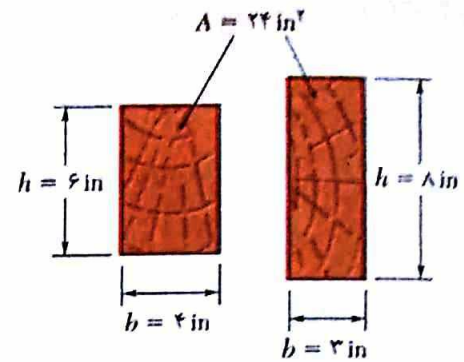
اما می‌دانیم که در ناحیه الاستیک رابطه $\epsilon_m = \sigma_m/E$ برقرار است. با جایگذاری مقدار ϵ_m در معادله (۴-۲۰) و با توجه به معادله (۴-۱۵) چنین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{Ec} = \frac{1}{Ec} \frac{Mc}{I}$$

یا

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (۴-۲۱)$$

۵- توجه داشته باشید که مقادیر بزرگ h/b می‌تواند موجب ناپایداری جانبی تیر شوند.

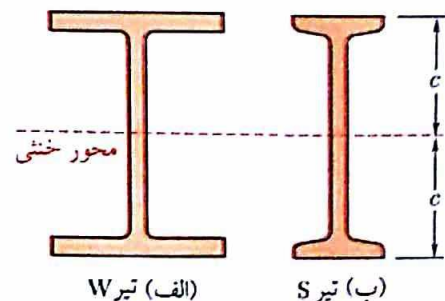


شکل ۴-۱۴

* elastic section modulus

شکل ۴-۱۵

کاربرد گسترده تیرهای فولادی بال‌پهن در ساخت اسکلت ساختمانها.

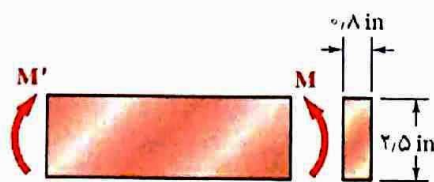


(الف) تیر W

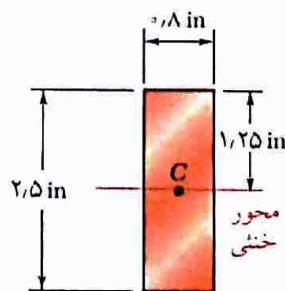
(ب) تیر S

شکل ۴-۱۶

مثال ۴-۱



شکل ۴-۱۷



شکل ۴-۱۸

یک میله فولادی با مقطع چهارگوش و ابعاد 0.8×2.5 in تحت یک جفت کوپل مخالف و مساوی که به صفحه تقارن عمودی میله وارد می‌شوند قرار دارد (شکل ۴-۱۷). مقدار گشتاور خمشی M را که منجر به تسلیم این میله می‌شود تعیین کنید. فرض کنید $\sigma_Y = 36$ ksi است.

از آنجا که محور خنثی باید از مرکز سطح مقطع میله C عبور کند، چنین خواهیم داشت $c = 1.25$ in (شکل ۴-۱۸). از طرف دیگر، گشتاور اینرسی یک سطح مقطع چهارگوش نسبت به مرکز سطح آن برابر است با:

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} (0.8 \text{ in})(2.5 \text{ in})^3 = 1.042 \text{ in}^4$$

با حل معادله (۴-۱۵) برای M ، و جایگذاری مقدار بالا در آن، چنین خواهیم داشت:

$$M = \frac{I}{c} \sigma_m = \frac{1.042 \text{ in}^4}{1.25 \text{ in}} (36 \text{ ksi})$$

$$M = 30 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

مثال ۴-۲

مختصات عرضی مرکز سطح میله $\bar{y}$ برابر است با:

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(12 \text{ mm})}{3\pi} = 5.093 \text{ mm}$$

محور خنثی از مرکز سطح C می‌گذرد و فاصله آن تا دورترین نقطه سطح مقطع برابر است با:

$$c = r - \bar{y} = 12 \text{ mm} - 5.093 \text{ mm} = 6.907 \text{ mm}$$

با استفاده از معادله (۴-۹) می‌توان چنین نوشت:

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} = \frac{6.907 \times 10^{-3} \text{ m}}{2.5 \text{ m}} = 2.763 \times 10^{-3}$$

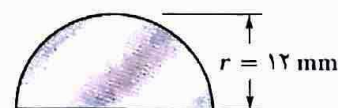
و با بکارگیری قانون «هوک»

$$\sigma_m = E \epsilon_m = (70 \times 10^9 \text{ Pa})(2.763 \times 10^{-3}) = 193.4 \text{ MPa}$$

از آنجا که این وجه در طرف مقابل مرکز انحناء قرار دارد، تنش ایجاد شده در آن از نوع کششی است. بیشترین تنش فشاری در وجه زیرین این میله رخ می‌دهد. با استفاده از این مطلب که میزان تنش متناسب با فاصله از محور خنثی است، می‌توان چنین نوشت:

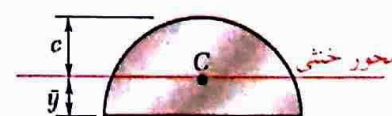
$$\sigma_{\text{comp}} = -\frac{\bar{y}}{c} \sigma_m = -\frac{5.093 \text{ mm}}{6.907 \text{ mm}} (193.4 \text{ MPa}) = -142.6 \text{ MPa}$$

یک میله آلومینیومی، با مقطع نیم‌دایره و شعاع $r = 12$ mm (شکل ۴-۱۹) به صورت کمانی از دایره با شعاع متوسط $\rho = 2.5$ m خم می‌شود. چنانچه وجه مسطح این میله به سمت مرکز انحناء باشد، بیشترین تنش کششی و فشاری در میله را پیدا کنید. $E = 70$ GPa است.



شکل ۴-۱۹

برای تعیین گشتاور خمشی M که انحنایی با شعاع ρ در میله ایجاد می‌کند می‌توان از معادله (۴-۲۱) استفاده کرد، سپس، از معادله (۴-۱۵) تنش σ_m را بدست آورد. با این وجود، راحت‌تر است که از معادله (۴-۹)، ϵ_m را تعیین و با استفاده از قانون «هوک» مقدار σ_m را بدست آورد.



شکل ۴-۲۰